長方形分割数に対する緩和による論理式のサイズの下界

福原秀明* 瀧本英二†

1 背景

計算理論分野においては，論理回路，論理式，決定木などの様々な表現モデルにおいて，与えられた関数を実現する最小表現の大きさをその関数の複雑さとし，様々な関数の複雑さをなるべく正確に見積もることを目標としている．特に，論理式の複雑さの研究において，ある NP 問題を表す関数の複雑さが多項式を超えることを示すことができれば，計算量理論において重要なクラス分離問題である $\mathrm{NC}^1 \neq \mathrm{NP}$ 問題が解決できたことになる．しかしながら，明示的に定義された関数に対し，現在知られている最大の複雑さの下界は $\Omega(n^{3-o(1)})$ にすぎない [1].

論理式複雑さの下界を得るための一つのアプローチとして，長方形分割数を求める手法がある．しかし，長方形分割数は整数計画問題で表現されるため，求めるのは容易ではないことが多い．そこで，これまでにその緩和問題が幾つか考えられてきた．近年 Ueno[4] により提案されたランク制約付き緩和問題は，多数決関数と多数決関数を用いたある合成関数に対して，既存の下界よりも大きな下界を導出している．本論文では，新たな緩和問題を提案し，マルチプレクサ関数に対しては，既存の緩和問題による下界よりも大きな下界を与えることができることを示す.

2 準備

論理式として {AND,OR,NOT} を基底とするものを考える．論理式のサイズとは，その式に現れる変数の個数である．論理関数 f に対し，f の論理式複雑さ $\mathrm{L}(f)$ とは，f を表すサイズが最小の論理式のサイズである.

Karchmer と Wigderson[3] は任意のブール関数に対する論理式複雑さを，Karchmer-Wigderson game と呼ばれるコミュニケーションゲームを用いた特徴付けを行った．このゲームへの入力は，n 変数論理関数 f である．このゲームは，二人のプレイヤー，アリスとボブによって行われる．まず，アリスには $f(\mathbf{x}) = 1$ である，ある入力 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ が与えられ，ボブには $f(\mathbf{y}) = 0$ である，ある入力 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ が与えられる．彼らの目標は，$x_i \neq y_i$ であるインデックス i を見つけることであり，そのために彼らは互いにメッセージを送りあうことができる．より具体的には，このコミュニケーションプロトコルは，次のような二分木で表現される.

- 各内部ノード v が $a_v : X \to \{0,1\}$ か $b_v : Y \to \{0,1\}$ のどちらかの関数でラベル付けられている．a_v のラベルが付けられたノード v ではアリスがメッセージを送ることを表し，b_v のラベルが付けられたノード v ではボブがメッセージを送ることを表す.
- 任意の $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対して，根から下ることで到達する葉には $x_i \neq y_i$ であるようなあるインデックス i でラベル付けられている.

葉の数を最小にするコミュニケーションプロトコルの葉の数を，プロトコル分割数 $C^P(f)$ と呼ぶ.

定理 1 (Karchmaer-Wigderson) 任意の論理関数 f に対して，$\mathrm{L}(f) = C^P(f)$

定義 1 (コミュニケーション行列) n 変数論理関数 f に対して，$X = \{\mathbf{x}|f(\mathbf{x}) = 0\}$，$Y = \{\mathbf{y}|f(\mathbf{y}) = 1\}$

*東北大学大学院情報科学研究科
†九州大学システム情報科学研究院情報理学部門

とする．f に対するコミュニケーション行列 M を次のように定義する．M の行と列は X の要素と Y の要素でそれぞれラベルづけられている．$M[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \{i | x_i \neq y_i\}$ とする．$X' \subseteq X$，$Y' \subseteq Y$ であるような直積 $X' \times Y'$ を長方形と呼ぶ．ある i が存在して，$X' \times Y'$ に含まれる任意の $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ に対して，$M[\mathbf{x},\mathbf{y}] \ni i$ であるとき，長方形 $X' \times Y'$ を単色長方形と呼ぶ．

$X \times Y$ を覆うために必要となる，互いに素な単色長方形の個数の最小値を長方形分割数 $C^D(f)$ と呼ぶ．任意の論理関数 f に対して，$C^D(f) \leq C^P(f)$ であることから，次の系が得られる．

系 1 任意の論理関数 f に対して，$\mathrm{L}(f) \geq C^D(f)$ である．

3 長方形分割数の数理計画問題による表現

Karchmer ら [2] は長方形分割数を整数計画問題 $\mathcal{N}$ で定式化し，さらに線形計画緩和問題 $\mathcal{P}_1$ を与えた．それらを以下に示す．論理関数 f に対して，f のコミュニケーション行列の単色長方形全体からなる集合を $\mathcal{R}$ とする．また，コミュニケーション行列 M によって定まる，数理計画問題 $\mathcal{P}$ の最適解を $\mathcal{P}(M)$ と書くことにする．

$\mathcal{N}$：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{r \in \mathcal{R}} x_r \\ \text{subject to} & \sum_{r \ni c} x_r = 1 \quad \text{for each } c \in X \times Y \\ & x_r \in \{0,1\} \quad \text{for each } r \in \mathcal{R}. \end{array}$$

$\mathcal{P}_1$：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{r \in \mathcal{R}} x_r \\ \text{subject to} & \sum_{r \ni c} x_r = 1 \quad \text{for each } c \in X \times Y \\ & x_r \geq 0 \quad \text{for each } r \in \mathcal{R}. \end{array}$$

$\mathcal{P}_1$ の双対問題は以下のようになる．

$\mathcal{D}_1$：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{c} w_c \\ \text{subject to} & \sum_{c \in r} w_c \leq 1 \quad \text{for each } r. \end{array}$$

命題 1 任意の関数 f とそのコミュニケーション行列 M に対して，$\mathcal{N}(M) = C^D(f)$，$\mathcal{N}(M) \geq \mathcal{P}_1(M)$．

Ueno は線形計画緩和問題の主問題に制約を追加することで，より大きな下界を与える可能性がある線形計画問題を定義し，実際にそれを用いることで多数決関数などに対し既存の下界よりも大きな下界を得ることに成功している．

コミュニケーション行列 M に対し，グラフ $G = (V, E)$ を次のように定義する．

- $V = \mathcal{R}$.
- $(r_1, r_2) \in E \Leftrightarrow r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$.

G の頂点集合 $V' \subseteq V$ によって誘導される部分グラフの全体を $\mathcal{G}$ とする．$g \in \mathcal{G}$ の安定数を $\alpha(g)$ とする．このとき，$\mathcal{P}_2$ を以下のような線形計画問題とする．$\mathcal{D}_2$ は $\mathcal{P}_2$ の双対問題である．

$\mathcal{P}_2$：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{r \in \mathcal{R}} x_r \\ \text{subject to} & \sum_{r \ni c} x_r = 1 \quad \text{for each } c \in X \times Y \\ & \sum_{r \in g} x_r \leq \alpha(g) \quad \text{for each } g \in \mathcal{G} \\ & x_r \geq 0 \quad \text{for each } r \in \mathcal{R}. \end{array}$$

$\mathcal{D}_2$：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{c} w_c + \sum_{g} \alpha(g) z_g \\ \text{subject to} & \sum_{c \in r} w_c + \sum_{g \ni r} z_g \leq 1 \quad \text{for each } r \\ & z_g \leq 1 \quad \text{for each } g. \end{array}$$

$\mathcal{P}_2$ は $\mathcal{P}_1$ に制約式を追加したものであること，$\mathcal{P}_2$ は以下の整数計画問題 $\mathcal{N}_2$ の線形計画緩和問題とみなせることから，次の命題が得られる．

$\mathcal{N}_2$：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{r \in \mathcal{R}} x_r \\ \text{subject to} & \sum_{r \ni c} x_r = 1 \quad \text{for each } c \in X \times Y \\ & \sum_{r \in g} x_r \leq \alpha(g) \quad \text{for each } g \in \mathcal{G} \\ & x_r \in \{0,1\} \quad \text{for each } r \in \mathcal{R}. \end{array}$$

命題 2 任意のコミュニケーション行列 M に対して，$\mathcal{N}(M) \geq \mathcal{P}_2(M) \geq \mathcal{P}_1(M)$．

4 セル指定による緩和整数計画問題

本章では，長方形分割数に対する新たな緩和問題 $\mathcal{N}'$ を与え，マルチプレクサ関数に対しては，既存の緩和問題よりも大きな下界を与えることができることを示す．

コミュニケーション行列において，インデックスを一つだけ含むセルをシングルトンと呼ぶことにする．コミュニケーション行列 M に対して，次の三つの条件を満たす k 個の長方形 $r_1, \ldots, r_k$ が存在すると仮定する．

- $r_i \cap r_j = \emptyset \quad (i \neq j)$.
- 各 r_i は少なくとも一つのシングルトンを含む．
- r_i が含むシングルトンのラベルの集合を S_i としたとき，$S_i \cap S_j = \emptyset \quad (i \neq j)$.

このとき，次のような整数計画問題 $\mathcal{N}'_i \ (1 \leq i \leq k)$ を定義する．$\mathcal{R}_i$ を r_i に含まれる単色長方形の全体とする．

$\mathcal{N}'_i$:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{r \in \mathcal{R}_i} x_r \\ \text{subject to} & \sum_{r \ni c} x_r = 1 \quad \text{for each } c \in S_i \\ & \sum_{r \ni c} x_r \leq 1 \quad \text{for each } c \in r_i, c \notin S_i \\ & x_r \in \{0,1\} \quad \text{for each } r. \end{array}$$

命題 3 任意のコミュニケーション行列 M に対して，$\mathcal{N}(M) \geq \sum_{1 \leq i \leq k} \mathcal{N}'_i(M)$.

以降では，マルチプレクサ関数に対する $\mathcal{N}'_i \ (1 \leq i \leq k)$ を考える．j-MUX(j は自然数) とは以下のような $j + 2^j$ 変数論理関数である．二進系列 x に対して，$(x)_2$ を x を二進数として解釈した値とする．例えば，$(011)_2 = 3$ である．

$$\begin{array}{l} j\text{-MUX}(x_1 x_2 \cdots x_j y_1 y_2 \cdots y_{2^j}) \\ \quad = \begin{cases} 1 & \text{if } y_{(x_1 \cdots x_j)_2 + 1} = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{array}$$

4.1 1-MUX

1-MUX のコミュニケーション行列は以下のようになる．

	001	011	110	111
000	{1}	{1,2}	{2,3}	{1,2,3}
010	{1,2}	{1}	{3}	{1,3}
100	{1,3}	{1,2,3}	{2}	{1,2}
101	{3}	{2,3}	{1,2}	{2}

表 1: 1-MUX のコミュニケーション行列

1-MUX においては，$\mathcal{N}'_i$，$\mathcal{P}_1$，$\mathcal{P}_2$ のどれを用いても論理式複雑さのタイトな下界を得ることができる．以下では，$\mathcal{N}'_i$ を用いて 1-MUX の論理式複雑さを導くとともに，1-MUX に対する $\mathcal{P}_1$ と $\mathcal{P}_2$ の最適解についても示す．

定理 2 L(1-MUX) $= 4$.

証明. 論理式 $(\bar{x}_1 \wedge y_1) \vee (x_1 \wedge y_2)$ は 1-MUX を表すため，L(1-MUX) ≤ 4.

$r_1 = (\{000\}, \{001\})$，$r_2 = (\{100\}, \{110\})$，$r_3 = (\{010, 101\}, \{001, 110\})$ という三つの長方形に対する，$\mathcal{N}'_1, \mathcal{N}'_2, \mathcal{N}'_3$ を考える．1-MUX に対するコミュニケーション行列を M とする．明らかに $\mathcal{N}'_1(M) = \mathcal{N}'_2(M) = 1$．$r_3$ については，二つのシングルトンを含む単色長方形が表 2 のように存在しないため，$\mathcal{N}_3(M) = 2$ となる．よって，命題 1，命題 2，系 1 より，L(1-MUX) ≥ 4.

	001	110
010	{1,2}	{3}
101	{3}	{1,2}

表 2: 1-MUX に対する r_3 のコミュニケーション行列

□

定理 3 1-MUX に対するコミュニケーション行列を M とする．このとき，$\mathcal{P}_1(M) = \mathcal{P}_2(M) = 4$.

証明. $C = \{(000,001), (100,110), (010,110), (101,001)\}$ とする．w_c を次のように定義する．

$$w_c = \begin{cases} 1 & \text{if } c \in C \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この w_c が $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ のどちらにおいても許容解であることは容易に確かめられる．この w_c によって与えられる目的関数の値は，$\mathcal{P}_1$ においても $\mathcal{P}_2$ においても 4 である．定理 2 より，これらは最適解である．よって，$\mathcal{P}_1(M) = \mathcal{P}_2(M) = 4$. □

4.2 2-MUX

$r_1 = (000000,\ 000001)$，$r_2 = (010000,\ 010010)$，$r_3 = (100000,\ 100100)$，$r_4 = (110000,\ 111000)$，$r_5 = (\{000110, 011001,\ 101001, 110110\}, \{001001, 010110, 100110, 111001\})$ に対する $\mathcal{N}'_i(1 \leq i \leq 5)$ を計算機で解かせることにより，次の定理を得た．

定理 4 2-MUX に対するコミュニケーション行列を M とする．このとき，$\sum_{1\leq i\leq 5} \mathcal{N}'_i(M) = 10$.

	001001	010110	100110	111001
000110	{1,2,3,4}	{5}	{6}	{5,6}
011001	{5}	{1,2,3,4}	{5,6}	{6}
101001	{6}	{5,6}	{1,2,3,4}	{5}
110110	{5,6}	{6}	{5}	{1,2,3,4}

図 1: 2-MUX に対する r_5 のコミュニケーション行列

よって，論理式 $\bar{x}_1(\bar{x}_2 y_1 \vee x_2 y_2) \vee x_1(\bar{x}_2 y_3 \vee x_2 y_4)$ が 2-MUX を表すことから，2-MUX の論理式複雑さが得られる．

定理 5 L(2-MUX) = 10.

$\mathcal{P}_1$ と $\mathcal{P}_2$ においても，$\mathcal{N}'$ と同様にタイトな下界が得られる．

定理 6 2-MUX に対するコミュニケーション行列を M とする．このとき，$\mathcal{P}_1(M) = \mathcal{P}_2(M) = 10$.

証明. $C_1 = \{(000000,\ 000001), (010000,\ 010010), (100000,\ 100100), (110000,\ 111000), (000110,\ 010110), (000110,\ 100110), (011001,\ 001001), (011001,\ 111001), (101001,\ 001001), (101001,\ 111001), (110110,\ 010110), (110110,\ 100110)\}$, $C_2 = \{(000110,\ 111001), (011001,\ 100110), (101001,\ 010110), (110110,\ 001001)\}$ とする．w_c を次のように定義する．

$$w_c = \begin{cases} 1 & \text{if } c \in C_1 \\ -0.5 & \text{if } c \in C_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この w_c が $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ のどちらにおいても許容解であることは容易に確かめられる．この w_c によって与えられる目的関数の値は，$\mathcal{P}_1$ においても $\mathcal{P}_2$ においても 10 である．定理 5 より，これらは最適解である．よって，$\mathcal{P}_1(M) = \mathcal{P}_2(M) = 10$. □

4.3 3-MUX

$P = 10010110$，$\bar{P} = 01101001$ とし，二進系列と P もしくは $\bar{P}$ を繋げて表記したものは，それらの連接を表すものとする．例えば，$001P = 00110010110$ である．

$r_1 = (00000000000,\ 00000000001)$，$r_2 = (00100000000,\ 00100000010)$，$r_3 = (01000000000,\ 01000000100)$，$r_4 = (01100000000,\ 01100001000)$，$r_5 = (10000000000,\ 10000010000)$，$r_6 = (10100000000,\ 10100100000)$，$r_7 = (11000000000,\ 11001000000)$，$r_8 = (11100000000,\ 11110000000)$，$r_9 = (\{000P,\ 001\bar{P},\ 010\bar{P},\ 011P,\ 100\bar{P},\ 101P,\ 110P,\ 111\bar{P}\}, \{000\bar{P},\ 001P,\ 010P,\ 011\bar{P},\ 100P,\ 101\bar{P},\ 110\bar{P},\ 111P\})$ に対する $\mathcal{N}'_i(1 \leq i \leq 9)$ を計算機で解かせることにより，次の定理を得た．

定理 7 3-MUX に対するコミュニケーション行列を M とする．このとき，$\sum_{1\leq i\leq 5} \mathcal{N}'_i(M) = 22$.

一方で $\mathcal{P}_1$ や $\mathcal{P}_2$ は 3-MUX に対してタイトな下界を与えることができない.

定理 8 3-MUX に対するコミュニケーション行列を M とする．このとき，$\mathcal{P}_1(M) = \mathcal{P}_2(M) = 18 + 2/3$.

5 まとめと今後の課題

論理式複雑さの下界を表す指標である長方形分割数は，整数計画問題 $\mathcal{N}$ で表現される．我々は $\mathcal{N}$ の制約式に対して，次の二つの緩和を行った整数計画問題 $\mathcal{N}'$ を与えた.

1. 特定のセルに対する制約式を除く.
2. 長方形に覆われないセルの存在を許す,

そして，j-MUX 関数 $(1 \leq j \leq 3)$ に対して，(1)$\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}$ に対する既存の緩和問題である (2)$\mathcal{P}_1$，(3)$\mathcal{P}_2$ の三つの最適化問題を解いた結果，1-MUX と 2-MUX ではどれを用いてもタイトな下界が得られるが，3-MUX では $\mathcal{N}'$ 以外ではタイトな下界を得られないことが判明した．我々は一般の j-MUX の場合においても $\mathcal{N}'$ を用いれば，タイトな下界を得ることが可能であるのではないかと予想している.

今後の課題としては，一般の j-MUX に対する $\mathcal{N}'$ の最適解を与えるための証明法を構築することと，$\mathcal{N}'$ でタイトな下界を示すことができる他の関数を発見すること，が挙げられる.

参考文献

[1] J. Håstad. The shrinkage exponent of De Morgan formulas is 2. *SIAM Journal on Computing*, 27(1):48-64, 1998.

[2] M. Karchmer, E. Kushilevitz, N. Nisan. Fractional covers and communication complexity. *SIAM Journal on Discrete mathematics*, 8(1):76-92, Feb. 1995.

[3] M. Karchmer, A. Wigderson. Monotone circuits for connectivity require super-logarithmic depth. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3(2):255-265, May. 1990.

[4] K. Ueno, A stronger LP bound for formula size lower bounds via cliquer constraints. *26th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science-STACS 2009*, 433-444, 2009.

	$000\bar{P}$	$001P$	$010P$	$011\bar{P}$	$100P$	$101\bar{P}$	$110\bar{P}$	$111P$
$000P$	B	$\{7\}$	$\{8\}$	$\{7,8\}\cup$B	$\{9\}$	$\{7,9\}\cup$B	$\{8,9\}\cup$B	$\{7,8,9\}$
$001\bar{P}$	$\{7\}$	B	$\{7,8\}\cup$B	$\{8\}$	$\{7,9\}\cup$B	$\{9\}$	$\{7,8,9\}$	$\{8,9\}\cup$B
$010\bar{P}$	$\{8\}$	$\{7,8\}\cup$B	B	$\{7\}$	$\{8,9\}\cup$B	$\{7,8,9\}$	$\{9\}$	$\{7,9\}\cup$B
$011P$	$\{7,8\}\cup$B	$\{8\}$	$\{7\}$	B	$\{7,8,9\}$	$\{8,9\}\cup$B	$\{7,9\}\cup$B	$\{9\}$
$100\bar{P}$	$\{9\}$	$\{7,9\}\cup$B	$\{8,9\}\cup$B	$\{7,8,9\}$	B	$\{7\}$	$\{8\}$	$\{7,8\}\cup$B
$101P$	$\{7,9\}\cup$B	$\{9\}$	$\{7,8,9\}$	$\{8,9\}\cup$B	$\{7\}$	B	$\{7,8\}\cup$B	$\{8\}$
$110P$	$\{8,9\}\cup$B	$\{7,8,9\}$	$\{9\}$	$\{7,9\}\cup$B	$\{8\}$	$\{7,8\}\cup$B	B	$\{7\}$
$111\bar{P}$	$\{7,8,9\}$	$\{8,9\}\cup$B	$\{7,9\}\cup$B	$\{9\}$	$\{7,8\}\cup$B	$\{8\}$	$\{7\}$	B

表 3: 3-MUX に対する r_9 のコミュニケーション行列，ここで $\mathrm{B} = \{1,2,3,4,5,6\}$ とする．