

2次の効用関数に関する不可分財の最適配分問題

塩浦昭義, 鈴木瞬也, 吉田卓司 (東北大学大学院情報科学研究科)

1 はじめに

本研究では, 不可分財に対する組合せオークションから生じる財の配分問題について考える. 組合せオークションでは, 複数の (不可分) 財を複数の参加者に配分する. 各参加者には, 財の部分集合に対する満足度を表す効用関数が与えられているとする. このとき, オークション主催者としての自然な目的は, オークションの社会的余剰 (社会的厚生), すなわち, オークション参加者全員の効用関数値の和を最大化することである.

この配分問題を数学的に記述する. このオークションでは m 個の異なる不可分財を n 人の参加者に配分するものとする. 配分される財の集合を $M = \{1, 2, \dots, m\}$, 入札者の集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とおき, 各入札者 $k \in N$ の配分された財の集合に対する満足度を表す効用関数を $v_k : 2^M \rightarrow \mathbf{R}$ とおくと, 財の配分問題は次のように定式化される.

$$\begin{aligned} & \text{最大化: } \sum_{k \in N} v_k(S_k) \\ & \text{条件: } \{S_k \mid k \in N\} \text{ は } M \text{ の分割.} \end{aligned}$$

本研究では, この財の配分問題の計算複雑度について議論する.

財の配分問題はこれまで盛んに研究が行われている. 問題の入力に用いられる効用関数を陽に表現すると指数サイズになってしまうため, 過去の研究では効用関数を何らかのオラクルによって暗に表現することが一般的である. 良く用いられるオラクルとしては, 効用関数の関数値を評価する value オラクルがある. このほか, 効用関数に関するある種の最適化問題の最適解を求めるという, より強力な demand オラクルも用いられることもある.

以上で述べたように, 財の配分問題を扱う場合には効用関数が暗に与えられることが多かった. しかしながら, 実際の組合せオークションなどで財の配分を行う際には効用関数を陽に与えなければならず, その表現に必要な指数サイズの記憶容量が問題となってしまう. この問題点を解決するために, 本研究では効用関数が 2 次形式で与えられる場合について考える. 2 次形式は以下のように定義される.

集合関数 $v : 2^M \rightarrow \mathbf{R}$ は, 実数 $w(i)$ ($i \in M$) および $w(i, j)$ ($i, j \in M, i < j$) を用いて

$$v(S) = \sum_{i \in S} w(i) + \sum_{i, j \in S, i < j} w(i, j) \quad (1)$$

と表されるとき, 2 次形式であると呼ばれる. ただし, $w(i)$ は任意の財 i に対する満足度を表し, $w(i, j)$ は任意の 2 種類の財 i, j に対する満足度の追加量を表すものとする. 2 次の効用関数には, 陽に表現したときのサイズが $O(m^2)$ に抑えられる, という利点がある. また, 式 (1) が優モジュラであることと, $w(i, j)$ がすべて非負であることは等価である. 本研究では, 効用関数が 2 次の優モジュラ関数の場合における財の配分問題に対するアルゴリズムに関して議論する.

2 2次の優モジュラ効用関数に対するアルゴリズム

入札者が 2 人の場合, 財の配分問題は有向グラフの最小 s-t カット問題に帰着可能である. 財の配分と s-t カットが 1 対 1 対応するような有向グラフを作り, その最小 s-t カットを求めることによって最適な配分を求める. 最小 s-t カット問題は多項式時間で

解けることから、入札者が 2 人の場合の財の配分問題は多項式時間で解けることがわかる。

次に、入札者が 3 人以上の場合について考える。この場合、財の配分問題は NP 困難であることを、無向グラフ上の k 端子カット問題を帰着することによって証明できる。この事実に基づき、本研究では近似アルゴリズムを提案する。本研究で提案する近似アルゴリズムは、局所探索法に基づくヒューリスティックなアルゴリズムである。入札者が 2 人の場合は最適な配分が多項式時間で求められることを利用して、入札者の財の配分を繰り返し改善していくアルゴリズムである。アルゴリズムの流れを以下に記す。

(STEP1) 初期解として、全ての財をランダムに入札者に配分する。

(STEP2) 任意の 2 人を選出し、入札者が 2 人の場合の多項式時間アルゴリズムを利用して、その 2 人の持っている財を最適に再配分する。

(STEP3) 入札者全員の効用関数の総和に変化が見られなくなるまで、(STEP2) を繰り返す。

3 近似アルゴリズムの性能評価

前述の近似アルゴリズムの性能実験を行った。近似比は近似解の目的関数値と最適解の目的関数値の比により表される。(STEP2) の多項式時間アルゴリズムの最小 s-t カットを求める部分に関しては、Boykov-Kolmogorov[1] による最大流問題を解くプログラムを使用した。実験で用いた各インスタンスの最適解は、整数計画問題に対するフリーのソルバーである GLPK を用いた。

1 つの実験に用いられるインスタンスでは、財の個数を 10 に固定し、入札者 k の効用 $w_k(i)$ は 0 ~ 100 までの値を、任意の 2 つの財の重み $w_k(i, j)$ は 0 ~ 10 までの値をランダムに生成した。実験の結果を図 1 のグラフに示す。それぞれの入札者数に対してインスタンスを 100 個生成して近似比を測定した結果の平均値と最小値(最悪値)を取った。実験結果より、この近似アルゴリズムによって高精度な解が得られることが確認できる。

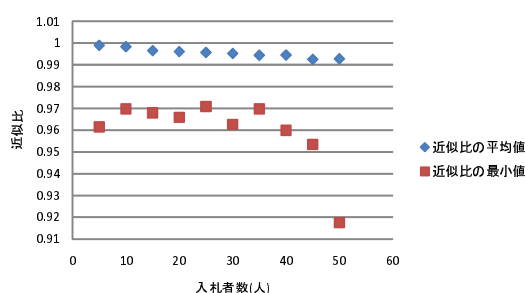


図 1: 実験 1 の結果

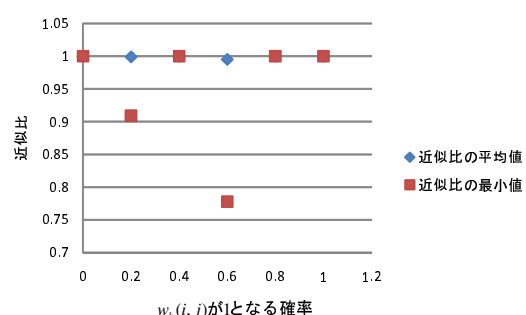


図 2: 実験 2 の結果

2 つ目の実験では、 k 端子カット問題を帰着して得られるインスタンスを用いて実験を行った。効用関数 $w_k(i)$ について、入札者 k は 1 つの財に対して 10000 の値を持ち、それ以外の財に対しては 0 を与える。 $w_k(i, j)$ については、ある確率によって、0 か 1 の値を与える。図 2 のグラフは、入札者が 5 人、財が 10 個の場合の実験結果である。この場合も、アルゴリズムによって高精度な解が得られた。

以上の結果より、提案する近似アルゴリズムの近似精度が高いことが実験的にわかった。提案する近似アルゴリズムの近似精度を理論的に評価することが今後の課題である。

参考文献

[1] Y. Boykov and V. Kolmogorov, An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision, *IEEE Transactions on PAMI* 26 (2004)), 1124-1137