オンラインランク統合問題*

安武 翔太† 畑埜 晃平‡ 瀧本 英二§ 竹田 正幸¶

{shouta.yasutake, hatano, eiji, takeda}@inf.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

近年，インターネット上での情報検索の発達や, オンラインショッピング，推薦システムの発展により，ランキングの研究が注目を盛んになっている．

中でも，**ランク統合** *(rank aggregation)* **問題**が大きな注目を集めている．ランク統合問題とは，サイズ n の順列が m 個与えられた下で，与えられた順列間の“ 距離 ”の和を最小化する順列を求める問題である．ここで，各順列は n 個の要素のランキングを表現している．つまり，ランク統合問題とは与えれたランキングの集合を“ 平均 ”したようなランキング（順列）を求める問題とみなせる．特に，順列間の距離が Kendall tau 距離（後述）で与えられるとき，最適な順列は Kemeny 最適ランキングと呼ばれる．以降, 断りのない場合, ランク統合問題においては Kendall tau 距離を扱うものとする．元々, ランク統合問題は, 選挙など社会的選択を扱う分野において古典的な問題である．近年, 情報検索の分野において複数の異なるサーチエンジンの出力したランキングを統合する事が重要になっており, ランク統合問題が見直されている．

ランク統合問題は理論計算機科学やアルゴリズム論の分野で盛んに研究が行われている．ランク統合問題は NP 困難であることが示されており [4], さらに, $m \geq 4$ 以上の場合にも NP 困難である [6]．近似アルゴリズムとしては, 11/7 倍近似を得る多項式時間アルゴリズム [2] や, PTAS （ただし, 近似度 ε に関しては指数の指数乗） [8] などが知られている．また, 部分的なランキングの統合問題については [1] が挙げられる．

本論文では, ランク統合問題の“ オンライン版 ”を考える．以下, **オンラインランク統合問題**と呼ぶ．この問題は, 順列をオンラインで予測する問題である．オンラインランク統合問題は以下のプロトコルからなる．各時刻 $t = 1, \ldots, T$ において,

1. 予測者は順列 $\hat{\sigma}_t$ を予測する．
2. 予測者は真の順列 σ_t を受け取る．
3. 予測者は損失 $d(\sigma_t, \hat{\sigma}_t)$ を受け取る．

予測者の目標はオフラインの最適な順列に匹敵するような予測を行うことである．すなわち, 最適な順列との累積損失の差（リグレット）

$$\sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t, \hat{\sigma}_t) - \min_{\sigma \in S_n} \sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t, \sigma)$$

をなるべく小さくすることである．

オンラインランク統合問題に対して，既存のアルゴリズムを適用した場合, 以下が成り立つ．

まず, 最もナイーブな手法は，$n!$ 個の各順列をエキスパートと見なし, エキスパートの予測統合アルゴリズムである Weighted Majority [9] を用いる事である．この場合, 累積損失は任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$(1+\varepsilon) \min_{\sigma \in S_n} \sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t, \sigma) + O\left(\frac{n^3 \ln n}{\varepsilon^2}\right),$$

となることが示せる．この手法の問題点は各時刻における計算時間が $O(n!)$ となる事である．

*“ トップ k リストのオンライン予測 ”より改題

†九州大学 工学部 電気情報工学科
‡九州大学大学院 システム情報科学研究院 情報学部門
§第 2 著者に同じ
¶第 2 著者に同じ

次に, 順列をオンライン予測するアルゴリズム PermELearn [7] を考える．このアルゴリズムは,Kendall tau 距離を損失として扱うようには設計されていないが, 順列間のもう１つの距離尺度である Spearman's footrule 距離（後述）を用いることができる．Kendall tau 距離 d と Spearman's footrule 距離 d_F についてては

$$d(\sigma,\sigma') \le d_F(\sigma,\sigma') \le 2d(\sigma,\sigma')$$

という関係が成り立つ [5] ことより, 累積損失の期待値が,

$$2(1+\varepsilon)\min_{\sigma\in S_n}\sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t,\sigma) + O\left(\frac{n^2\ln n}{\varepsilon^2}\right),$$

となることが示せる．各時刻ごとの計算時間は多項式時間である[1].

本論文では, オンラインランク統合問題に対する新しい予測アルゴリズム（**PermRank**）を提案する．PermRank の累積誤差の期待値は高々

$$3(1+\varepsilon)\min_{\sigma\in S_n}\sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t,\sigma) + O\left(\frac{n^2}{\varepsilon^2}\right)$$

であり, 各時刻における計算時間は $O(n^2)$ である．

2　準備

自然数 $n (n \ge 1)$ を１つ固定する. S_n を $\{1,\ldots,n\}$ 上の順列の集合とする． 順列 $\sigma_1,\sigma_2 \in S_n$ 間の *Kendall tau* **距離** $d(\sigma_1,\sigma_2)$ とは

$$d(\sigma_1,\sigma_2) = \sum_{i,j=1}^{n} I(\sigma_1(i)>\sigma_1(j) \land \sigma_2(i)<\sigma_2(j)),$$

で与えられる，ただし，$I(\text{真})=1$, $I(\text{偽})=0$ とする．つまり，順列間の Kendall tau 距離とは各ペア間における順序の食い違いの総数である. 定義より，$0 \le d(\sigma_1,\sigma_2) \le n(n-1)/2$ であり，また，距離の公理を満たす.

[1] PermELearn の主な計算は Sinkhorn balancing と呼ばれる, 確率行列に正規化する操作である．この操作には $O(n^6\ln(n/\varepsilon))$ の近似アルゴリズム [3] が知られている (ε は $\varepsilon>0$ を満たす近似パラメータである).

順列 $\sigma_1,\sigma_2 \in S_n$ 間の *Spearman's footrule* **距離** $d_F(\sigma_1,\sigma_2)$ とは

$$d_F(\sigma_1,\sigma_2) = \sum_{i=1}^{n} |\sigma_1(i)-\sigma_2(i)|$$

である．一般に，$d(\sigma_1,\sigma_2) \le d_F(\sigma_1,\sigma_2) \le 2d(\sigma_1,\sigma_2)$ が成り立つ [5].

次に，$N=n(n-1)/2$ とする．$\{0,1\}^N$ 上のベクトル $\boldsymbol{q}$ を**比較ベクトル**と呼ぶ. 順列から比較ベクトルへの写像は以下の $\phi: S_n \to [0,1]^N$ によって与えられる：

$$\phi(\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 & \sigma(i)<\sigma(j), \\ 0 & \text{そうでない場合}, \end{cases}$$

ただし，$i,j \in \{1,\ldots,n\}$ であり $i \ne j$ とする.

このとき，２つの順列間の Kendall tau 距離は対応する比較ベクトル間の 1 ノルム距離で表せる：

$$d(\sigma_1,\sigma_2) = \|\phi(\sigma_1)-\phi(\sigma_2)\|_1,$$

ここで，1 ノルムとは $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{N}|x_i|$ である．例えば，順列 $\sigma=(1,3,2)$ に対する比較ベクトルは $\phi(\sigma)=(1,1,0)$ である．一般に，比較ベクトルに対して，対応する順列が必ずしも存在するとはかぎらない．例えば，比較ベクトル $(1,0,1)$ は３すくみの関係（$\sigma(1)>\sigma(2), \sigma(2)>\sigma(3), \sigma(3)>\sigma(1)$）を表しており，対応する順列は存在しない.

以降，比較ベクトル $\boldsymbol{q} \in \{0,1\}^N$ が対応する順列をもつとき，比較ベクトル $\boldsymbol{q}$ は**無矛盾**であるという.

実数 $p,q \in [0,1]$ に対して，p,q 間の *2* **値相対エントロピー** $\Delta_2(p,q)$ を以下のように定義する.

$$\Delta_2(p,q) = p\ln\frac{p}{q} + (1-p)\ln\frac{1-p}{1-q}.$$

さらに，2 値相対エントロピーの定義をベクトルに拡張する．任意のベクトル $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q} \in [0,1]^N$ に対し，２値相対エントロピーは次のように定義される.

$$\Delta_2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{N}\Delta_2(p_i,q_i).$$

3 提案手法

本章では，提案手法（PermRank）について述べる．本手法のアイデアは大きく 2 つに分けられる．1 つ目のアイデアは順列を $N = n(n-1)/2$ 次元の比較ベクトルと見なし，比較ベクトルを予測することである．その際，比較ベクトルの各次元 ij をそれぞれ独立なベルヌーイ分布でモデル化する．すなわち，比較ベクトルの各次元 ij の値は確率 p_{ij} で表の出るコインによって決まると仮定し，パラメータ p_{ij} をオンラインで推定する．

2 番目のアイデアは，比較ベクトルからの順列の生成にある．まず，推定した比較ベクトルの確率モデルにしたがってランダムに比較ベクトルを選ぶ．次に，比較ベクトルから順列を生成する．このとき，一般に比較ベクトルに対応するような順列は存在しない．つまり，確率モデルから得られた比較ベクトルは全順序の性質を満たさないかもしれない．そこで，要素ペア毎の順序関係のみに注目し，ピボットとなる要素を選んで，無理矢理クイックソートでソートし，順列を得る．

実はこの操作により，元の全順序でない比較ベクトルと十分近い順列を得ることができる．クイックソートを用いるアイデアは元々（オフラインの）ランキング統合問題に対して，Ailon らが提案したものである [2]．

本手法の詳細を Algorithm 1, Ailon らの提案した KWIKSORT [2] を Algorithm 2 にそれぞれ示す[2]．

3.1 更新式の導出

本節では更新式の導出を行う．

まず，$y_i \in \{0,1\}$ と p_i の差の絶対値に関して次式が成り立つ．

$$|y_i - p_i| = p_i(1-y_i) + (1-p_i)y_i.$$

[2]本論文では KWIKSORT に若干の変更を加えている．Ailon らのオリジナル版では整数 i はランダムに選ぶ（後述）のに対して，我々が用いる KWIKSORT では整数 i を任意に選んでよい．

Algorithm 1 PermRank

入力：パラメータ $\eta > 0$.

1. $\boldsymbol{p}_1 = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in [0,1]^N$.
2. For $t = 1, \dots, T$
   (a) $p_{t,ij}$ で $q_{t,ij} = 1$ になるような確率分布に従って，$\boldsymbol{p}_t$ から $\boldsymbol{q}_t \in \{0,1\}^N$ を任意に選ぶ.
   (b) $\widehat{\sigma}_t = \textbf{KWIKSORT}(\boldsymbol{q}_t)$ を予想する．
   (c) 真の順列 σ_t を受け取る．$\boldsymbol{y}_t = \phi(\sigma_t)$ とする．
   (d) $\boldsymbol{p}_{t+1}$ を次式により更新する．
   $$\boldsymbol{p}_{t+1} = \arg\min_{\boldsymbol{p}} \eta \|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{p}\|_1 + \Delta_2(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_t).$$

そこで，ラグランジュ関数を

$$L(\boldsymbol{p}) = \eta \sum_i |y_i - p_i| + \sum_i \Delta_2(p_i, p_i')$$

と置く，ただし，$\boldsymbol{p}'$ は更新前のベクトルとする．このとき，

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = \eta(1-2y_i) + \ln\frac{p_i}{1-p_i} + \ln\frac{1-p_i'}{p_i'}$$

となる．導関数を 0 と置くことで次式を得る．

$$p_i = \frac{\left(\frac{p_i'}{1-p_i'}\right)e^{-\eta(1-2y_i)}}{1 + \left(\frac{p_i'}{1-p_i'}\right)e^{-\eta(1-2y_i)}} = \frac{p_i' e^{-\eta(1-y_i)}}{(1-p_i')e^{-\eta y_i} + p_i' e^{-\eta(1-y_i)}}.$$

3.2 解析

次に， PermRank の累積誤差の上界を示す．

まず，最適な比較ベクトル $\boldsymbol{q}$ と仮説のベクトル $\boldsymbol{p}_t$ との“ 距離 ”(2 値相対エントロピー）が更新のたびに近づいていくことを示す．

補題 1. 任意の時刻 $t \in \{1, ..., T\}$ において，任意の比較ベクトル $\boldsymbol{q}$ に対して以下が成り立つ．

Algorithm 2 KWIKSORT [2]

入力: 比較ベクトル $\boldsymbol{q}$

出力: 順列

1. S_L と S_R をそれぞれ空集合とする．
2. 整数 i を $\{1,\ldots,n\}$ から任意に選ぶ
3. i と異なる全ての $j\in\{1,\ldots,n\}$ について，
   (a) $q_{ij}=1$ ($j<i$ のときは $q_{ij}=1$) ならば，S_R に j を加える．
   (b) そうでなければ，S_L に j を含める．
4. $\boldsymbol{q}_L,\boldsymbol{q}_R$ を S_L と S_R から作られたベクトルとする．
5. $(\textbf{KWIKSORT}(\boldsymbol{q}_L), i, \textbf{KWIKSORT}(\boldsymbol{q}_R))$ を出力する．

$$\Delta_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_t)-\Delta_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_{t+1})\geq$$
$$-\eta\|\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{q}\|_1+(1-e^{-\eta})\|\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{p}_t\|_1.$$

証明.

$$\begin{aligned}
&\Delta_2(q_i,p_{t,i})-\Delta_2(q_i,p_{t+1,i})\\
&=q_i\ln\frac{q_i}{p_{t,i}}+(1-q_i)\ln\frac{1-q_i}{1-p_{t,i}}\\
&-q_i\ln\frac{q_i}{p_{t+1,i}}-(1-q_i)\ln\frac{1-q_i}{1-p_{t+1,i}}\\
&=q_i\ln\frac{p_{t+1}}{p_{t,i}}+(1-q_i)\ln\frac{1-p_{t+1,i}}{1-p_{t,i}}\\
&=-q_i\eta(1-y_{t,i})-(1-q_i)\eta y_{t,i}\\
&-\ln\left((1-p'_i)e^{-\eta y_{t,i}}+p'_ie^{-\eta(1-y_{t,i})}\right)\\
&=-\eta|y_{t,i}-q_i|\\
&-\ln\left((1-p'_i)e^{-\eta y_{t,i}}+p'_ie^{-\eta(1-y_{t,i})}\right).
\end{aligned}$$

$y_{t,i}\in\{0,1\}$ に対して $e^{-\eta y_{t,i}}=1-(1-e^{-\eta})y_{t,i}$ が成り立つ．よって上式は，

$$\begin{aligned}
&=-\eta|y_{t,i}-q_i|\\
&-\ln\big(1-(1-e^{-\eta})((1-p_{t,i})y_{t,i}+p_{t,i}(1-y_{t,i}))\big)\\
&\geq-\eta|y_{t,i}-q_i|+(1-e^{-\eta})|y_{t,i}-p_{t,i}|
\end{aligned}$$

となる．最後に，この不等式を $i=1,\ldots,N$ に渡って足し合わせることにより，与式を得る． □

次に，仮説 $\boldsymbol{p}_t$ の 1 ノルム距離の累積誤差を示す．

定理 1. 任意の比較ベクトル $\boldsymbol{q}$ に対して以下が成り立つ．

$$\sum_{t=1}^{T}\|\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{p}_t\|_1\leq\frac{\eta\sum_{t=1}^{T}\|\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{q}\|_1+\frac{n(n-1)}{2}\ln 2}{1-e^{-\eta}}.$$

証明. 補題 1 の不等式を $t=1,\ldots,T$ に渡って足し合わせると，

$$\frac{\eta\sum_{t=1}^{T}\|\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{q}\|_1-\Delta_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_{T+1})+\Delta_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}_1)}{1-e^{-\eta}}$$

が成り立つ．$\Delta_2(q,p_{T+1})=0$．および $\Delta_2(q,p)\leq\ln 2$ より，与式を得る． □

次に，各時刻 t において，KWIKSORT を実行後の比較ベクトル $\boldsymbol{q}'_t$ とする．このとき，次の補題が成り立つ．

補題 2. 任意の時刻 $t\in\{1,...,T\}$ において，任意の無矛盾な比較ベクトル $\boldsymbol{q}$ に対して，

$$\|\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{q}'_t\|_1\leq\|\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{q}_t\|_1+2\|\boldsymbol{q}_t-\boldsymbol{q}\|_1$$

が成り立つ．

証明. 比較ベクトル $\boldsymbol{q}$ に対し，次のような有向グラフ $G=(V,E)$ を考える．頂点 $V=\{1,...,n\}$ とし，辺については，$q_{ij}=0$ のとき $(i,j)\in E$，そうでないとき $(j,i)\in E$ とする．また，G $i\to j, j\to k, k\to i$ の関係にある三角形を 3 すくみ三角形と呼び，(i,j,k) と表記することにする．

KWIKSORT において，ピボットとなる要素 k が選ばれたとき，頂点 k を含む 3 すくみの三角形

(i,j,k) について考える．このとき，頂点 i,j は2つの異なるグループに分割される．また，(i,j) の向きは反転するため，この三角形の3すくみは解消される．i,j は異なるグループに属するので，解消された3すくみ三角形は次の再帰呼び出しにおいて，再度解消されることはない．以上から，$\boldsymbol{q}_t$ と $\boldsymbol{p}_t$ 間の1ノルム距離は解消された3すくみ三角形の総数に等しい．

次に，解消された3すくみ三角形の総数と無矛盾な任意の比較ベクトルと $\boldsymbol{q}_t$ との1ノルム距離との関係を考える．一般に，ピボットとなる頂点 k に対して，頂点 k を含む3すくみの三角形は複数存在しうる．また，それらは辺を共有している場合もありうる．仮に，ℓ 個の隣接した，k を含む3すくみの三角形があったとする．このとき，これらの3すくみの三角形に対して，無矛盾な比較ベクトルは少なくとも $\frac{\ell}{2}$ 個向きの異なる辺をもつ．また，異なる再帰呼び出しにおいて，解消された3つすくみ三角形同士はたがいに辺を共有しない．

以上の議論から，任意の無矛盾な比較ベクトル $\boldsymbol{q}$ に対して，

$$\|\boldsymbol{q}_t - \boldsymbol{p}_t\|_1 \leq 2\|\boldsymbol{q}_t - \boldsymbol{q}\|_1$$

が成り立つ．よって，三角不等式を用いることにより，

$$\begin{aligned} d(\sigma_t, \widehat{\sigma}_t) = \|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{p}_t\|_1 &\leq \|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{q}_t\|_1 + \|\boldsymbol{q}_t - \boldsymbol{p}_t\|_1 \\ &\leq \|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{q}_t\|_1 + 2\|\boldsymbol{q}_t - \boldsymbol{q}\|_1. \end{aligned}$$

□

特に，$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{y}_t$ とおくと以下の系が成り立つ．

系 2. 任意の時刻 $t \in \{1, ..., T\}$ において，以下が成り立つ．

$$\|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{q}'_t\|_1 \leq 3\|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{p}_t\|_1.$$

さらに，$y_t \in \{0,1\}$ に対する1ノルム距離の線形性から　誤差 $d(\sigma_t, \widehat{\sigma}_t)$ の期待値は $\|\boldsymbol{p}_t - \boldsymbol{y}_t\|_1$ と一致する．このことから，以下の補題が成り立つ．

補題 3. 任意の時刻 $t \in \{1, ..., T\}$ において，以下が成り立つ．

$$\mathbf{E}[d(\sigma_t, \widehat{\sigma}_t)] \leq 3\|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{q}_t\|_1.$$

最後に，主定理を証明する．

定理 3. PermRank の累積誤差の期待値について以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t, \widehat{\sigma}_t)\right] \\ &\leq \frac{3\eta \min_{\sigma \in S_n} \sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t, \sigma) + \frac{n(n-1)}{2} \ln 2}{1 - e^{-\eta}}. \end{aligned}$$

証明. 補題 3 を $t \in \{1, ..., T\}$ について足し合わせると，

$$\mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t, \widehat{\sigma}_t)\right] \leq \sum_{t=1}^{T} \|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{p}_t\|_1 + \sum_{t=1}^{T} \|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{q}\|_1$$

が成り立つ．定理 1 を上式に代入すると，

$$\begin{aligned} &\frac{\eta \sum_{t=1}^{T} \|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{q}\|_1 + \frac{n(n-1)}{2} \ln 2}{1 - e^{-\eta}} + \|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{q}\|_1 \\ &= \sum_{t=1}^{T} (1 + \frac{\eta}{1 - e^{-\eta}}) \|\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{q}\|_1 + \frac{n(n-1)\ln 2}{2(1 - e^{-\eta})} \end{aligned}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{q}$ は任意の順列であるから，上式は累積誤差が最小になる順列についても当然成り立ち，与式を得る． □

ここで，$\eta \geq 0$ のとき，$\eta \leq e^{\frac{\eta}{2}} - e^{-\frac{\eta}{2}}$ より，$\eta = 2\ln(1+\varepsilon)$ とおくと，$\frac{\eta}{1-e^{-\eta}} \leq e^{\frac{\eta}{2}} = (1+\varepsilon)$，$\frac{1}{1-e^{-\eta}} = \frac{(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon^2+2\varepsilon}$ が成り立つ．よって，以下の系が成り立つ：

系 4. $\eta = 2\ln(1+\varepsilon)$ とおくとき，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t, \widehat{\sigma}_t)\right] \\ &\leq 3(1+\epsilon) \min_{\sigma \in S_n} \sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t, \sigma) + O\left(\frac{n^2}{\varepsilon^2}\right). \end{aligned}$$

4　結論と今後の課題

本稿では，比較ベクトルおよび KWIKSORT[2] のアイデアを用いて順列を予想する手法を提案した．そして，本手法が累積誤差の期待値，各時刻の計算

時間において過去に提案された手法よりも優れていることを示した．

本稿では，比較ベクトルから順列を生成する際にソーティングを用いたが，これに代わる方法として，更新後に比較ベクトルの $\{0,1\}$ ベクトルの張る空間に射影することが考えられる．射影後のベクトルは無矛盾な比較ベクトルの線形結合で書けるので，結合係数に従ってランダムに無矛盾な比較ベクトルを選べば，本稿の解析を維持したまま，

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t, \widehat{\sigma}_t)\right] \\ &\leq (1+\epsilon)\min_{\sigma \in S_n}\sum_{t=1}^{T} d(\sigma_t, \sigma) + O\left(\frac{n^2}{\varepsilon^2}\right)\end{aligned}$$

が示せると思われる．しかし，射影に最悪で指数時間かかることが予想され，射影を用いる手法については課題が残されている．

また，本問題の自然な拡張として，n 要素のランキングのうち特に上位 k 要素のみを考慮するトップ k リストの予測が考えられる．トップ k リスト予測への応用についても今後取り組む予定である．

謝辞

本研究は科研費若手研究（B）21700171 の援助を受けてなされた．

参考文献

[1] N. Ailon. Aggregation of partial rankings, p-ratings and top-m lists. In *Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA2007)*, pages 415–424, 2007.

[2] N. Ailon, M. Charikar, and A. Newman. Aggregating inconsistent information: Ranking and clustering. *Journal of the ACM*, 55(5), 2008.

[3] H. Balakrishnan, I. Hwang, and C. J. Tomlin. Polynomial approximation algorithms for belief matrix maintenance in identity management. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4874–4879, 2004.

[4] J. Bartholdi, C. A. Tovey, and M. A. Trick. Voting schemes for which it can be difficult to tell who won the election. *Social Choice ad Welfare*, 6:157–165, 1989.

[5] P. Diaconis and R. L. Graham. Spearman's footrule as a measure of disarray. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 39(2):262–268, 1977.

[6] C. Dwork, R. Kumar, M. Naor, and D. Sivakumar. Rank aggregation methods for the web. In *Proceedings of the Tenth International World Wide Web Conference (WWW2001)*, pages 613–622, 2001.

[7] D. P. Helmbold and M. K. Warmuth. Learning permutations with exponential weights. *Journal of Machine Learning Research*, 10:1705–1736, 2009.

[8] C. Kenyon-Mathieu and W. Schudy. How to rank with few errors. In *Proceedings of the 39th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC2007)*, pages 95–103, 2007.

[9] N. Littlestone and M. K. Warmuth. The weighted majority algorithm. *Information and Computation*, 108(2):212–261, 1994.